ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

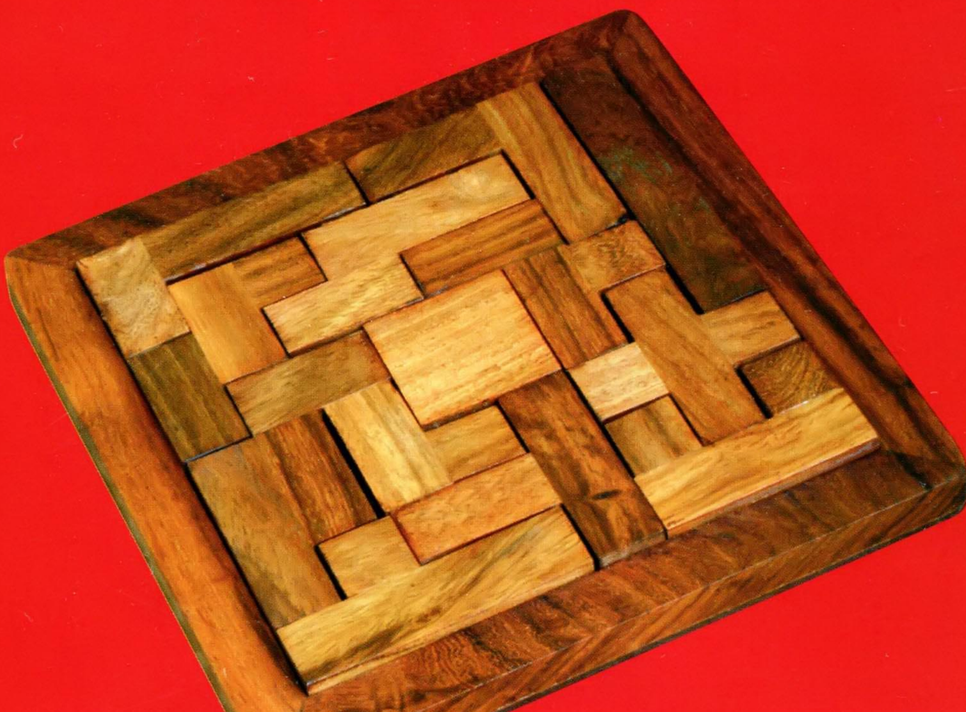
Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

8

Магические кубики



ISSN 2225-1782
00008

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 8, 2012
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01

Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 170100, г. Тверь, Почтамт, а/я 245,
«Де Агостини», «Занимательные головоломки»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ЗАО «ИД Бурда»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко

Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
Импортер и дистрибьютор в РБ ООО «РЭМ-ИНФО»,
г. Минск, пер. Козлова, д. 7г, тел.: (017) 297-92-75
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Республика Беларусь, 220037, г. Минск,
а/я 221, ООО «РЭМ-ИНФО», «Де Агостини»,
«Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 990 тенге

ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: G. Canale & C. S.p.A.
Sos. Cernica 47, Bucuresti, Pantelimon – Ilfov, Romania.

ТИРАЖ: 115 000 экз.

Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.

Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

© ООО «Де Агостини», 2012
© RBA Coleccionables, 2011
ISSN 2225-1782

ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 22.05.2012

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Экспоненциалы Геометрическая прогрессия — опасная вещь. Стоит выпустить экспоненциальный рост из-под контроля, и случится непоправимое: Землю заполонят мириады бактерий и крыс, размножающихся чудовищными темпами, все компьютеры станут бесполезны, так как время обработки данных будет уходить в плюс-бесконечность... В экспоненциальном спаде тоже нет ничего приятного: вспомним хотя бы ядерные катастрофы. Тем не менее, экспоненциалы постоянно присутствуют в нашей жизни, и благодаря их использованию перед человечеством открываются интереснейшие возможности.

Блистательные умы

Омар Хайям Этот поэт писал не только о вине и любви. Кроме этих двух несомненно близких ему тем, Омара Хайяма интересовали также кубические уравнения, иррациональные числа и прочие тонкости «алджебры». Он подошел почти к порогу открытия неевклидовой геометрии, причем в те самые темные средневековые времена, когда в Европе про Евклида мало что знали. Математический гений великого поэта незаслуженно пребывал в забвении вплоть до середины XX века, но тем интереснее нам узнать его сегодня с этой неожиданной стороны.

Математика на каждый день

Цепная линия Линия в форме свисающей под собственным весом цепи (или праздничной гирлянды) — одна из наиболее распространенных в природе кривых. Галилей, который, как можно предположить исходя из его биографии, имел некоторое представление о цепях, считал ее вариантом параболы. Однако это оказалось не совсем так. Цепные линии широко используются в архитектуре: арки, горбатые мосты и прочие акведуки обязаны своим существованием именно им.

Математические задачки

Льюис Кэрролл Автор «Алисы в Зазеркалье» — непревзойденный мастер смешивать математику с английским юмором. Над его задачами сначала смеются, а потом задумываются. В любом случае, считать встречные поезда вместе с Безумной Математильдой и ее юной племянницей — весело и интересно. Но будьте предельно внимательны и постарайтесь не пропустить ни один проходящий мимо состав!

Головоломки

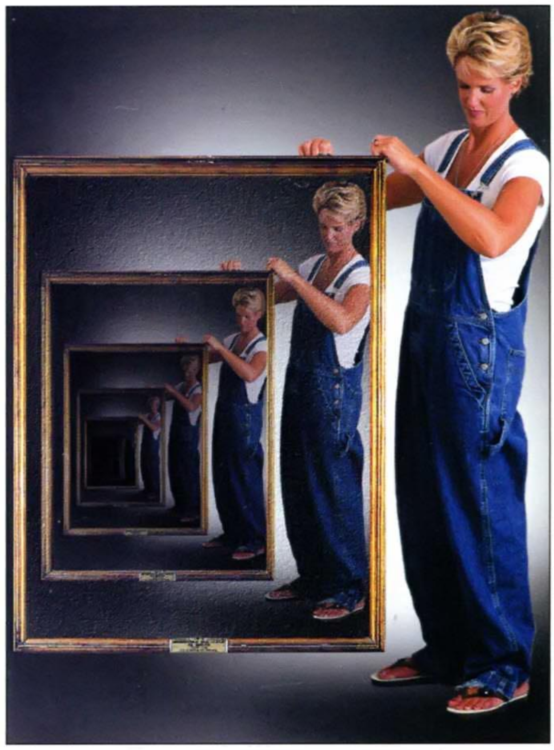
Магические кубики Каждый хотя бы раз в жизни играл в «Тетрис» (между прочим, эта игра была изобретена советским тогда еще ученым Алексеем Пажитновым в далеком 1984 году). Но мало кто знает, что в основе «Тетриса» лежит достаточно известная головоломка — пентамино. В нее можно играть без компьютера, причем не просто складывать плоские фигуры, но и собирать параллелепипеды из кубиков. В общем, попробуйте пощупать «Тетрис» руками!

В НАУКЕ СЛОВОСОЧЕТАНИЕ «ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ» — СЛОВНО УПОМИНАНИЕ ДЬЯВОЛА. ОНО МОЖЕТ ОЗНАЧАТЬ ЛИШЬ ОДНО — НЕКОНТРОЛИРУЕМОЕ ВОЗРАСТАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ ПРИВОДИТ К КАТАСТРОФАМ — ЧТО В БИОЛОГИИ, ЧТО В ИНФОРМАТИКЕ.

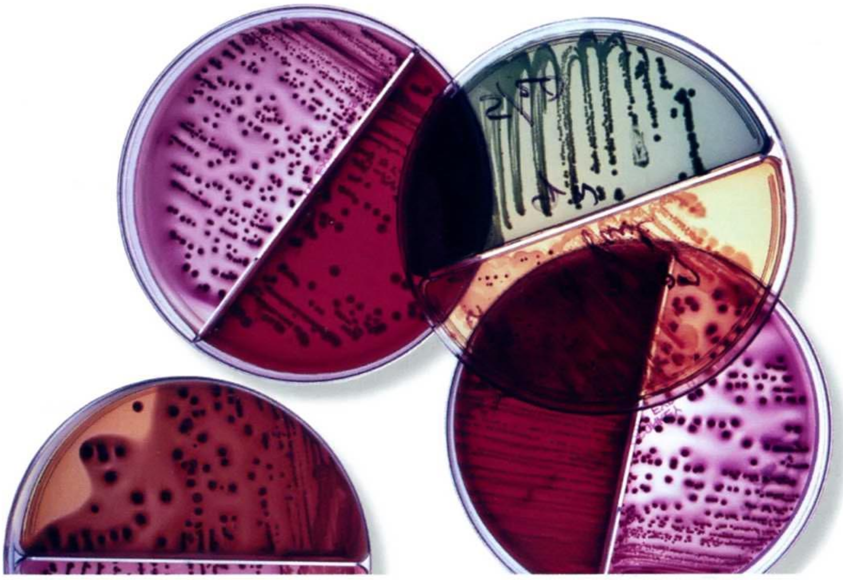
Экспоненциалы
Алгебра роста

Давайте представим, что у нас есть бактерия, растущая в чашке Петри. Она помещена в благоприятную среду, где может питаться и воспроизводиться. Через 20 минут от нее отделяется вторая бактерия. И через каждые 10 минут — следующая. То есть через 40 минут вместо одной первой бактерии у нас будут уже четыре микроорганизма, а через час — восемь. Каждый из них весит очень мало — около одной биллионной грамма (0,000 000 000 001 г), то есть для того, чтобы общий вес бактерий достиг одного грамма, их нужен один биллион. Итак, вопрос следующий: каков будет вес посева через 48 часов? Мы помним, что данный вид бактерии воспроизводится каждые 20 минут. Смело заключайте пари — вы выиграете. Даже хорошо умеющие считать люди здесь, скорее всего, допустят ошибку. Итоговый вес бактерий будет в четыре тысячи раз превышать вес Земли. Конечно, в маленькой чашке Петри этого не получится, потому что в определенный момент бактерии из-за количества выделяемых ими отходов жизнедеятельности просто перестают размножаться. Но если представить себе, что этого не происходит, то станет понятно, насколько быстро «плохие» бактерии смогут решить вопрос с перенаселенностью планеты.

Результаты подобных вычислений, всегда поражающие своими немыслимыми пропорциями, в математике называются экспоненциальным ростом. Расчеты прироста популяции относятся именно к этой части математики, и числа, которыми они оперируют, не перестают удивлять. Например, если одна пара крыс четыре раза в год будет производить по четыре крысенка, то всего лишь через 60 поколений крысы полностью покроют поверхность Земли.



► *На фото мы видим бесконечность в отражениях зеркал. Данный пример наглядно иллюстрирует принцип экспоненциальной алгебры. Отражения становятся все меньше и образуют убывающую последовательность. Это и называется геометрической прогрессией.*



▼ *Бактерии, растущие в чашке Петри. Деление через равные промежутки времени является экспоненциальным ростом, и останавливают его лишь ограниченные стенками чашки пищевые ресурсы; в природе воспроизводство этих бактерий может быть разрушительным.*

Пара определений

Операция, где число x складывается само с собой столько раз, сколько требует число n, называется умножением.

$$x + \overbrace{\ldots}^{n \text{ veces}} + x = x \cdot n$$

В свою очередь умножение числа x на само себя n-ное количество раз называется *возведением в степень.*

$$x \cdot \overbrace{\ldots}^{n \text{ veces}} \cdot\ x = x^n$$

Число x — это основа, а число n — показатель степени (экспонент).

Считается, что последовательность чисел растет линейно с увеличением константы скорости, то есть каждое следующее значение может быть

Правила возведения в степень

Возведение числа x в n-ную степень подчиняется следующим правилам:

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = 0$$

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

получено путем добавления определенного числа к предыдущему. Например:

4, 7, 10, 13, 16...

где таким числом является три. Это фиксированное значение, которое прибавляется к каждому числу для получения следующего. Если n — позиция, занимаемая предыдущим числом, то ее значение можно изобразить так: $f(n)$, где $f(n) = n + 3$.

Если же значение величины возрастает не в результате сложения, а благодаря умножению каждого числа на определенный множитель, то здесь мы имеем дело с *экспоненциальном ростом* (возрастанием в геометрической прогрессии), как в следующем случае:

2, 4, 8, 16, 32...

Каждый член прогрессии, начиная со второго, получается из предыдущего путем умножения его на определенное число. В данном случае, на два. Представим это в виде формулы: $f(n) = 2^n$. Приведенные числовые последовательности также получили названия *арифметическая и геометрическая прогрессии* соответственно.

Ритм шахмат

Существует легенда, ярко иллюстрирующая коварство экспоненциального роста. В ней говорится о человеке, придумавшем шахматы. В награду за его изобретение султан предложил ему выбрать любое сокровище. И тот попросил зерна.

Он захотел, чтобы ему дали столько зерна, сколько клеток на шахматной доске, причем с условием, что на первую клетку будет положено одно зерно, а на каждую последующую — в два раза больше, чем на предыдущую. Правитель, неважнецки разбиравшийся в математике, с легкостью согласился. Он даже не представлял, что зерна, выращиваемого на всей Земле, окажется недостаточно. Несмотря на то, что многие знакомы с этой историей или хотя бы слышали о ней, подловить кого-нибудь тем же способом труда не составит. Можно просто предложить положить одну копейку на первую клетку доски, две — на вторую, четыре — на третью и т. д. Не стоит заключать подобный договор в присутствии нотариуса, ведь никому не по силам ни заплатить конечную сумму, ни даже приблизиться к ней: речь идет о богатстве, накопленном чело-

▼ *Страница из «Книги об играх», составленной при Альфонсо X Кастильском. На рисунке изображена легенда о происхождении шахмат на Востоке. На первую клетку доски нужно было положить одно зерно пшеницы, а на каждую следующую — в два раза больше, чем на предыдущую. Таким образом, мы впервые сталкиваемся с геометрической прогрессией, последнее значение которой —* 2^{63}.

вечеством за все долгие века своего существования. Сумма, о которой мы сейчас говорим, равна 18 446 744 073 709 551 615 рублям.

Типы процентов

Пример экспоненциального роста из повседневной жизни — сложный процент. Сравнение простых и сложных процентов позволяет ясно увидеть разницу между линейной и геометрической прогрессиями. Допустим, вы решили положить в банк 1000 рублей под процентную ставку 5% годовых. За первый год ваш вклад возрастет до 1000 + 50 = 1050 рублей, за второй — до 1050 + + 50 = 1100, за третий — до 1100 + 50 = 1150.

Мощь десяти

▼ *Масштаб выражается на языке математических символов как десятичная степень основного размера — метра. Слева направо: галактика, насчитывающая, предположительно,* 10^{11} *звезд и находящаяся на расстоянии* 10^{15} *м от нашей планеты; земной шар, диаметр которого около* 10^7 *м; элемент рельефа литосферы порядка* 10^3 *м.*

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Сложный процент	1 050	1 102	1 157	1 215	1 276	1 340	1 407	1 477	1 551	1 628	1 710	1 795
Простой процент	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600

Здесь речь идет о линейном росте, где каждое следующее значение получено путем прибавления 50 к предыдущему. Капитал $f(n)$ через n лет:

$$f(n) = 1000 + 50n.$$

И наоборот, если речь идет о вложении на 10 лет по сложной процентной ставке 5% годовых, то, используя формулу

$$C = C_0 (1 + i)^n,$$

где C_0 — исходный капитал, i — ставка, а n — количество лет, мы получим следующее:

$$1000;\ 1000\,(1 + 0{,}05);\ 1000\,(1 + 0{,}05)^2;$$
$$1000\,(1 + 0{,}05)^3;\ 1000\,(1 + 0{,}05)^4 \ldots$$

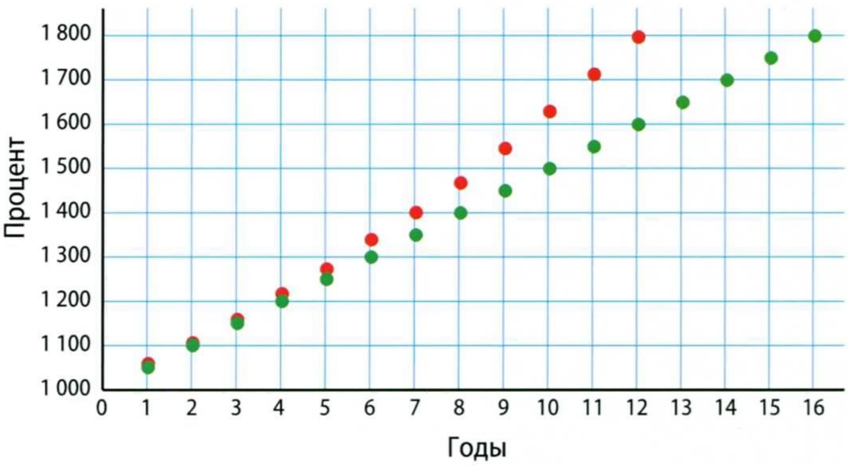
То есть капитал $f(n)$ через n лет

$$f(n) = 1000\,(1 + 0{,}05)^n,$$

после определенных операций, станет таким:

$$1000;\ 1050;\ 1102{,}5;\ 1157{,}6;\ 1215{,}5\ldots$$

Как можно заметить, каждое следующее значение получено из предыдущего путем умножения на коэффициент 1,05. В верхней части страницы находится сравнительная таблица двух видов ставок; отбросив знаки после запятой, мы увидим, что разница между двумя числами очень мала на протяжении первых двух лет, но затем, по прошествии времени, она заметно увеличивается. Если представить эти значения в виде двух линий на графике, по вертикальной оси которого будут откладываться годы, а по горизонтальной — капитал, то у нас получится диаграмма как наверху страницы. Соединив точки, мы увидим, что кривая, соответствующая сложным процентным ставкам (красного цвета), растет быстрее, чем та, что соответствует простым (зеленого цвета).



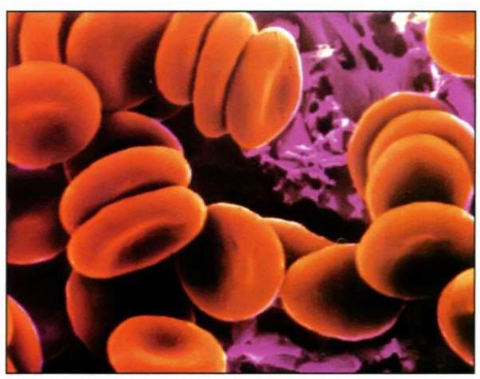
▲ *Графики роста вкладов с простыми и сложными процентными ставками (зеленый и красный цвета соответственно) для начального вложения в размере 1000 рублей под 5% годовых.*

Если бы речь шла о вкладе на 24 года (на таблице не отображен такой срок), то к концу этого периода вклад по сложной процентной ставке вырос бы до 3225, тогда как по простой ставке он достиг бы всего лишь цифры 2200. Разница достаточно заметна.

Наглядное представление

График наверху наглядно иллюстрирует пример со вкладами, однако с математической точки зрения он неточен — экспонент всегда выражается кривой, и эта кривая «поднимается» настолько быстро, что, как правило, приходится задавать разный масштаб горизонтальной и вертикальной осям, иначе линия просто выйдет за пределы рисунка. На изображениях на следующей странице представлен линейный рост типа 2, 4, 6, 8... красным цветом и экспоненциальный рост 2, 4, 8, 16... зеленым. Как видно из графика, начиная с номера 2 по шкале x кривая резко уходит вверх, удаляясь от прямой. Первая из них — это функция вида $f(x) = 2x$, где мы получаем последовательность,

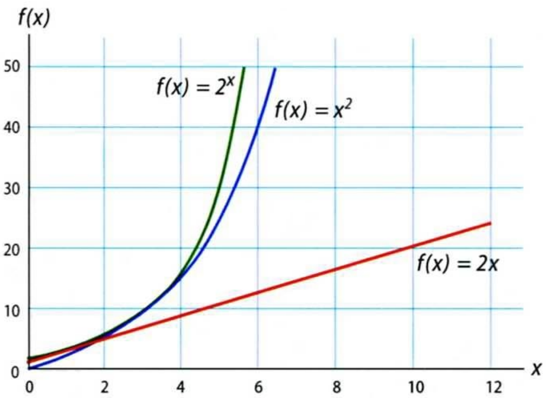
▼ *Мощь десяти: если принять за данность, что масштаб, в котором мы видим человека, равен 10^1 м, то насекомое мы будем рассматривать в масштабе 1^{-2} м, а клетку гемоглобина — 10^{-5} м.*



в которой x равен 1, 2, 3... В отличие от первой функции, вторая выглядит так: $f(x) = 2^x$. Для получения ряда необходимо поднять до 2 экспоненты 1, 2, 3...

Синим цветом изображена третья кривая роста $f(x) = x^2$. Точкам 1, 2, 3, 4... по горизонтальной оси соответствуют значения 1^2, 2^2, 3^2, 4^2... Этот вид роста не является ни линейным, ни экспоненциальным, представляя собой нечто среднее между ними. Часто его называют потенциальным или полиномным.

Посмотрим, что произойдет, если вместо того, чтобы умножать все значения на два, мы возведем их в квадрат. То есть построим ряд, выраженный в виде x^2.



На таблице в правом верхнем углу страницы видно, что вновь появившееся значение достигает x^2 на уровне номера 4, где обе кривых получают одинаковое значение — 16, но с этого момента экспонент начинает все больше отдаляться. Вопрос теперь состоит в том, что произойдет, если вместо возведения в квадрат ($f(x) = x^2$) числа 2 мы увеличим показатель степени и возьмем, например, 5 ($f(x) = x^5$). Рисунок с изображением данного ряда получился бы чересчур громоздким. Но можно заметить, что номер 8 имеет значение $8^5 = 32\,768$, и оно гораздо выше значения 64, которое соответствовало бы экспоненциальному ряду. Значит ли это, что ряд

$$1^5, 2^5, 3^5, 4^5...$$

растет быстрее, чем

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5... ?$$

До определенного предела. Точнее сказать трудно, ведь начиная с известного момента экспоненциальный ряд получает значительное преимущество. Например, для номера 50 это $50^5 = 312\,500\,000$, при том что $2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624$. То есть можно с абсолютной уверенностью утверждать, что на номере 50 экспоненциал не только перегнал соответствующую точку конкурентного ряда, но и удаляется от нее на огромной скорости.

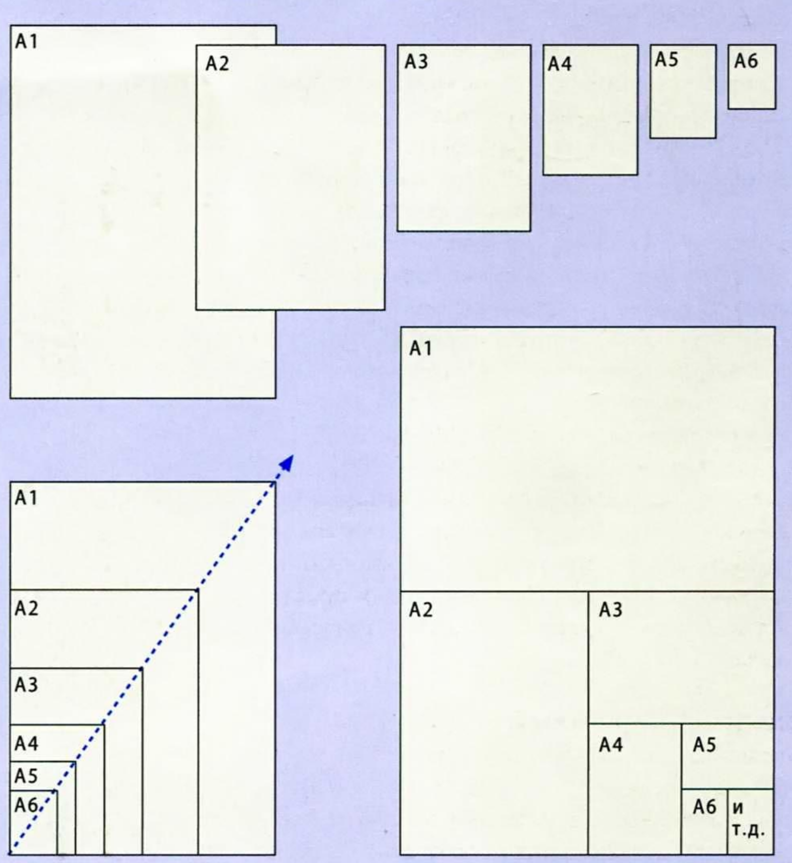
Линейный рост:	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Полиномный рост:	x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Экспоненциальный рост:	2^x	1	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

◄ *Сравнительный график линейного (красный), полиномного (синий) и экспоненциального (зеленый) роста.*

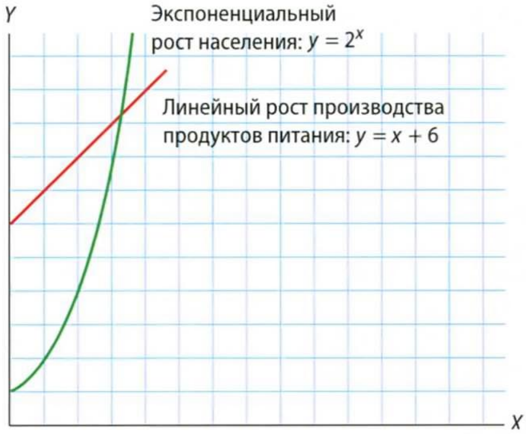
Можно математически доказать, что нет функции вида xn, чей рост будет больше, чем у экспоненциальной функции 2^x. Кроме того, эта функция всегда растет быстрее любой другой полиномной функции, то есть суммы степеней вида x, x^2, x^3, x^4... как, например, выражение вида $3x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 8$. Этот факт имеет огромное значение для некоторых областей программирования. При попытке разрешить определенную проблему путем установки на компьютер специальной программы жизненно необходимо, чтобы количество совершаемых шагов увеличивалось полиномным образом, сообразно сложности задачи, то есть в соответствии с ростом числа

Стандарты DIN

Привычные нам форматы бумаги были установлены немецкими промышленными нормами, более известными как стандарты DIN *(Deutsche Industrie Normen)*. Геометрическая связь между стандартизированными форматами демонстрирует экспоненциальный характер. Лист формата *An* (бывают листы A1, A2, A3, A4 и т.д.) состоит из 2^{n-1} раз листа A1.



данных, поступающих в программу. Когда это не так, и время работы программы по мере ввода новых данных растет в геометрической прогрессии, то время выполнения, в течение которого машина должна представить результат, затягивается настолько, что ее использование становится нецелесообразным. Большая часть программного обеспечения, применяемого для шифрования данных — персональных, банковских или военных — основывает свою безопасность именно на этом. Существуют программы для вскрытия цифровых кодов, но на подбор ключей им требуется целая пропасть времени. На взлом могут уйти сотни миллионов лет.



◀ *Теория Мальтуса: производство продуктов увеличивается линейно, а население — экспоненциально.*

Видение Мальтуса

Пересечения линий и кривых на графиках линейного и экспоненциального роста позволяют увидеть определенные закономерности и предсказать будущее. Томас Роберт Мальтус (1766—1834) — британский экономист, ученик Адама Смита — в своей работе «Опыт о законе народонаселения» выдвинул тезис, что рост населения скоро превысит возможности Земли производить пропитание. Он подчеркивал: «Достаточно владеть элементарными навыками счета, чтобы оценить огромную разницу между двумя силами и склониться к первой». Здесь он сравнивал линейное и экспоненциальное поведение двух тенденций. На графике можно видеть, что пока мы не достигнем точки, где линии пересекаются, производство продуктов питания будет больше, чем рост населения земли. Но затем кривая населения начинает стремительно удаляться от прямой, отражающей производство средств существования. По мнению Мальтуса, «если предположить, что население земли равно миллиарду человек, человеческий род будет расти как числа: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и т. д., в то время как средства существования будут прибавляться следующим образом: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и т. д. Через два века с четвертью соотношение населения и средств существования будет 512 к 10; еще через три века эта пропорция станет 4096 к 13, а еще через две тысячи лет разницу окажется невозможно подсчитать, несмотря на немыслимые размеры производства». Мы не будем вдаваться в анализ теории Мальтуса, но отметим, к каким интересным выводам ему удалось придти путем простого сравнения арифметической и геометрической прогрессий.

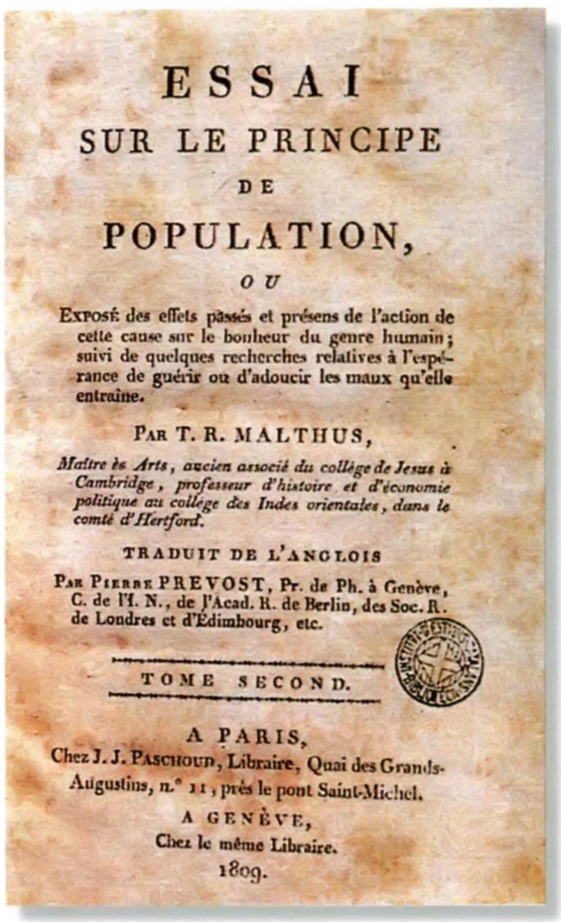
Экспоненциальный спад

Экспоненциальное поведение включает в себя не только рост, но и обратный процесс, называемый экспоненциальным спадом. Механизм такого уменьшения очень похож на предыдущий, но лишь с той разницей, что оно пропорционально каждой из присутствующих величин. Например, первоначально заданное число 100 при скорости спада 0,5 даст нам серию чисел:

100; 50; 25; 12,5; 6,25 и т. д.,

где каждое следующее число получается благодаря умножению предыдущего на 0,5 (что равносильно его делению на 2). В общем, при экспоненциальном спаде каждое число получается путем умножения предыдущего на постоянную величину, которая должна быть меньше единицы.

▲ *Портрет Томаса Роберта Мальтуса, одного из родоначальников политэкономии и основателей демографии.*



ESSAI
SUR LE PRINCIPE
DE
POPULATION,
OU
Exposé des effets passés et présens de l'action de cette cause sur le bonheur du genre humain; suivi de quelques recherches relatives à l'espérance de guérir ou d'adoucir les maux qu'elle entraîne.

PAR T. R. MALTHUS,

Maître ès Arts, ancien associé du collége de Jesus à Cambridge, professeur d'histoire et d'économie politique au collége des Indes orientales, dans le comté d'Hertford.

TRADUIT DE L'ANGLOIS

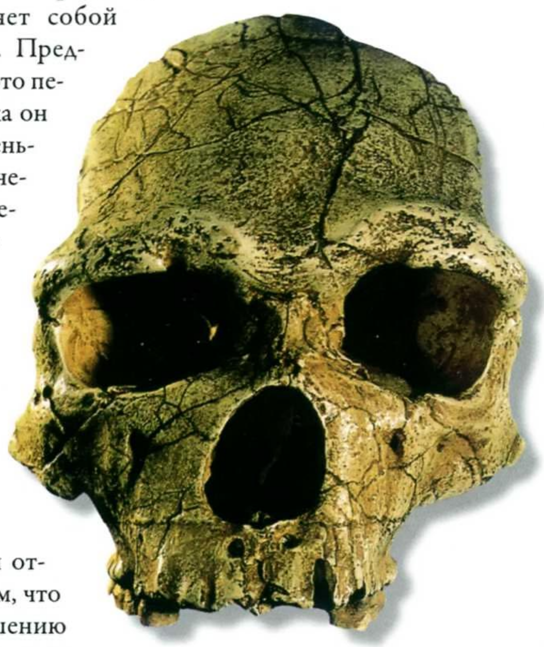
PAR PIERRE PREVOST, Pr. de Ph. à Genève, C. de l'I. N., de l'Acad. R. de Berlin, des Soc. R. de Londres et d'Édimbourg, etc.

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez J. J. PASCHOUD, Libraire, Quai des Grands-Augustins, n.° 11, près le pont Saint-Michel.
A GENÈVE,
Chez le même Libraire.
1809.

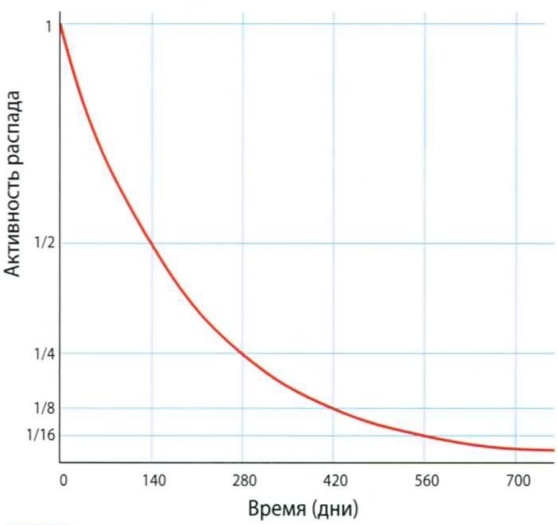
◀ *Книга «Опыт о законе народонаселения» была анонимно выпущена в 1798 году и обрела огромную известность во всех уголках земного шара. Слева — французское издание 1809 года.*

Характерный пример этого вида уменьшения — радиоактивный распад. Ядра радиоактивного вещества распадаются естественным путем. Время t полураспада определяется как время, необходимое для того, чтобы количество n ядер уменьшилось в два раза. Так как количество происходящих распадов пропорционально количеству радиоактивных ядер, то процесс дезинтеграции представляет собой экспоненциальный спад. Представим себе, что если t — это период полураспада, то, пока он происходит, образец m уменьшается в два раза $m/2$, и через соответствующие периоды времени действие продолжается по той же схеме: $m/4$, $m/8$, $m/16$... Например, период распада полония составляет 140 дней. На графике ниже дни отмечены по горизонтальной оси, а общая выборка — по вертикальной. Проведя линию от точки, которая отмечает 140 дней, мы видим, что она соответствует уменьшению первоначального количества радиоактивных ядер в два раза. Характерная кривая экспоненциального распада та же, что и при экспоненциальном росте. Единственное их отличие в том, что одна «поднимается», а вторая «опускается». Это явление находит практическое применение в датировке археологических и геологических памятников. Чаще всего для определения абсолютной хронологии используется ^{14}C — нестабильный изотоп углерода, содержащийся в атмосфере. На протяжении всей жизни животные и растения впитывают и усваивают его вместе со стабильными изотопами углерода, а после смерти организма ^{14}C начинает распадаться, и период полураспада составляет 5568 лет. Для определения возраста методом радиоуглеродного анализа в содержащих органику археологических находках подсчитывается количество ^{14}C и сравнивается с количеством стабильных изотопов.



▲ *Радиоуглеродный анализ позволяет устанавливать возраст археологических находок по периоду полураспада изотопа углерода.*

Есть и другие экспоненциальные распады, не такие сложные, как этот. Вероятно, распад аромата фруктов или томатов — это процесс со схожими характеристиками. Другой пример был приведен математиком Джоном Алленом Паулосом — он высказал предположение, что количество читателей математического текста уменьшается в два раза после каждой формулы, встретившейся в нем. Быстрый подсчет позволил бы нам увидеть, что до этих последних строчек дошли лишь очень немногие из начинавших читать данную статью.



◀ *График экспоненциального замедления распада полония. Активность распада атомов снижается вдвое каждые 140 дней.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- В последние годы развитие персональных компьютеров состояло в постоянном увеличении их возможностей — скорости процессора, емкости жесткого диска и оперативной памяти. Относительно последней любопытно отметить, что рост ее объема происходил по экспоненциальному типу:

$$1, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,$$

что является 2^n. В начале XXI века в употреблении были платы 512 Мб оперативной памяти. На основании этого можно предположить, что будущее компьютеров предсказать будет несложно.

- Написание x^{m^n} тождественно $x^{(m^n)}$. А это значит, что:

$$10^{10^{10}} = 10^{10\,000\,000\,000},$$

то есть одной единице с 10 000 000 000 нулей. Это число огромно. Большие значения всегда легче записывать, используя степени, хотя обычно они и не соответствуют никакому реальному количеству. Одно из самых длинных чисел, когда-либо использовавшихся в математике, это число Фолкмана:

$$F = 10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$$

Его размер был почти что невообразим. Это значение встречается в теории графов и показывает минимальное количество вершин, которое должен иметь граф, удовлетворяющий определенным условиям. Это число было открыто в конце XX века.

В истории Омар остался больше поэтом, нежели математиком. Но при жизни обе грани совмещались в его гениальном и беспокойном уме. Когда Хайяму не исполнилось еще и 20 лет, он выпустил три книги: по арифметике, музыке и алгебре.

Выдающийся математик Омар Хайям

Имя Омара Хайяма стало известно на Западе благодаря книге «Рубайят» (в переводе с персидского — «афоризм в форме четверостишия»), изданной в 1859 году Эдвардом Дж. Фицджеральдом, в которой были собраны и переведены 600 четверостиший. Вскоре после этого издания последовали переводы на большинство европейских языков, и лирические произведения персидского поэта Омара Хайяма признали одним из шедевров литературы. Но за этими сокровищами оказались забыты важнейшие труды по алгебре и геометрии (последние были открыты только в 1960 году), которые обнаружили в поэте лучшего математика древней Персии и Средневековья.

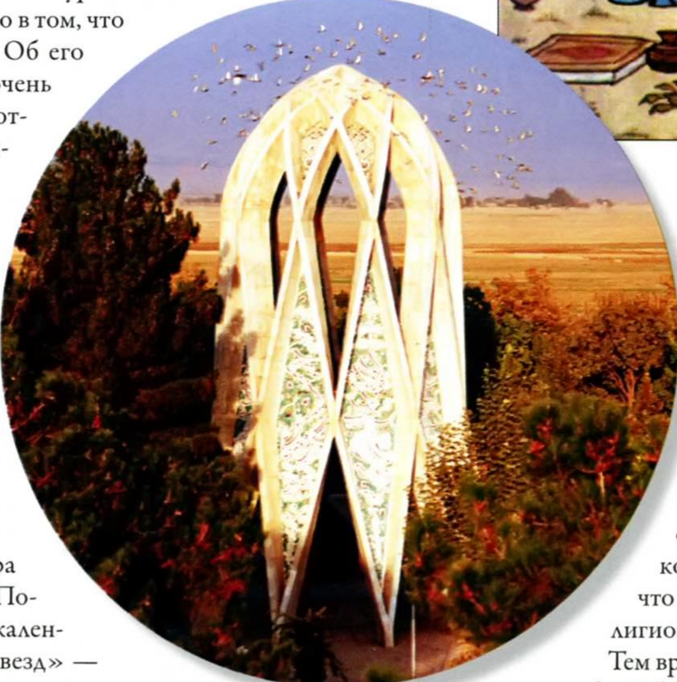
▶ Омар Хайям за написанием стихов для самого известного своего литературного сборника — «Рубайят». Он был выдающимся астрономом и алгебраистом, но известность пришла к нему именно как к поэту.

Политические волнения

Омар Хайям родился в Персии, в городе Нишапуре (сейчас территория Ирана), в мае 1048 года. Его полное имя было Гиясаддин Абу-ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Хайям Нишапури, «тот, кто строит кущи мудрости». Дело в том, что Омар был сыном палаточника. Об его детстве и отрочестве известно очень мало. Омар рано отказался от отцовской опеки и решил посвятить себя изучению астрономии и математики.

Большинство легенд, собранных историками, говорят о ранней дружбе с Низамом аль-Мульком и Хассаном ибн Саббахом. Трое друзей поклялись помогать друг другу, если кому-нибудь из них удастся достигнуть вершин власти.

Так и получилось: в 1073 году Низам аль-Мульк стал визирем Исфахана и пригласил Омара Хайяма жить при дворе султана. Поэт занял должность составителя календарей и управляющего «домом звезд» — только что построенной обсерваторией.



▲ Величественный мавзолей, расположенный в родном городе поэта — Нишапуре, показывает, с каким почтением относятся к Омару Хайяму в восточном мире.

Омар Хайям, который до этого момента подвергался осуждению со стороны ортодоксальных мусульман, обосновался в Исфахане, где прожил относительно спокойно в течение 18 лет. К данному периоду относится основная часть его математических работ. Проведенная им реформа летоисчисления значительно опередила Юлианский календарь: Хайям определил продолжительность года, которая равнялась 365,24 219 858 156 дням, что удивительно точно для той эпохи. Например, в настоящее время продолжительность года считается 365,242 190 дня.

Несмотря на защиту визиря, Омара Хайяма продолжало преследовать исламское духовенство, которое обвиняло ученого в том, что его теории мало согласуются с религиозными постулатами.

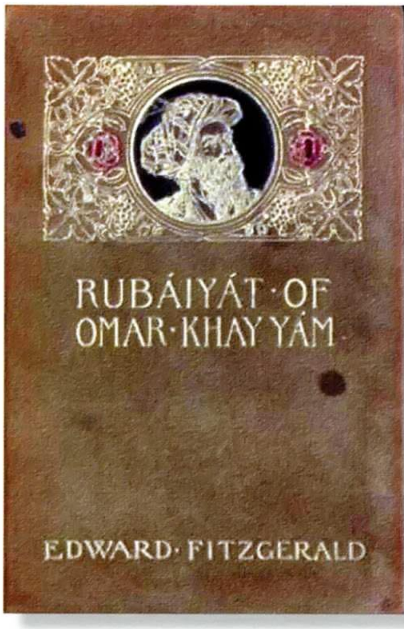
Тем временем третий заговорщик, Хассан ибн Саббах, который был назначен казначеем, сбежал, так как оказался замешан в заговоре против визиря. Он захватил крепость в горах и основал мистическую секту ассасинов («потребляющих гашиш»). В 1092 умер султан Исфахана, и его визирь Низам аль-Мульк был убит, вероятно, сторонниками Хассана. Новая власть немедленно лишила Хайяма должности в обсерватории, которая затем была закрыта, а обновленный им календарь был предан забвению. Начиная с этого момента известно мало достоверных фактов биографии Омара. Есть версия, что Хайям оказался вынужден, уже будучи в зрелом возрасте, совершить паломничество в Мекку, а затем был заключен в темницу в Нишапуре, где и скончался в 1122 году.

Алгебраист и геометр

Омар Хайям открыл систему решения кубических уравнений, в его методе неизвестное строилось как точка пересечения двух подходящих конических сечений (см. график внизу). Его «Трактат о доказательствах проблем ал-джебры и ал-мукабалы» содержит законченную классификацию кубических уравнений с решениями, основанными на пересечениях конических сечений.

Самым выдающимся в этой работе было предположение о том, что такие уравнения, как $x^3 + 200x = 20x^2 = 2000$, не могут быть решены при помощи использования свойств круга, то есть посредством линейки и циркуля. Это предположение было доказано лишь в 1837 году французским математиком Пьером Ванцелем. Также Хайям вопреки математическим представлениям того времени утверждал, что данные уравнения могут иметь более одного решения. Правда, он останавливался всего на двух вариантах и не допускал возможности существования третьего.

В 1077 году ученый написал «Трактат об истолковании темных положений у Евклида» — работу, которая затем не перевыпускалась вплоть до 1936 года. В ней поднимается проблема «пятого постулата» Евклида, в котором говорится о параллельности прямых. Труд Хайяма был очень важным вкладом в рождение неевклидовой геометрии, до которого оставалось еще целых восемь веков. Также ученому удалось на уровне интуиции почувствовать существование иррациональных чисел.

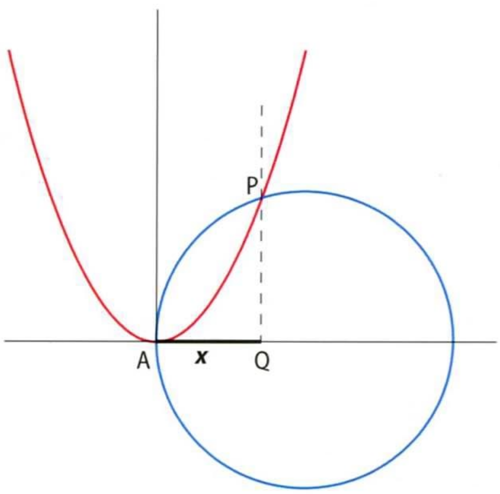


▲ *Обложка книги «Рубайят», выпущенной на Западе и переведенной на английский язык блестящим знатоком востока Эдвардом Дж. Фицжеральдом.*

Решая уравнения

Одно из многих и любопытнейших геометрических построений кубических уравнений, к которым Хайям нашел ключи. Инструкции подходят для решения любого уравнения такого типа: $x^3 + a^2x + b$:

- Нарисовать параболу $x^2 = ay$.
- Нарисовать окружность диаметром $AC = b/a^2$ на горизонтальной оси.
- Окружность и парабола должны пересекаться в точке P.
- Нарисовать перпендикуляр через P к горизонтальной оси и определить точку Q.
- Решение кубического уравнения: $x = AQ$.



ЭТО ИНТЕРЕСНО

- В Персии XII века не знали таких слов, как опиум, гашиш или индийская конопля, — их ввел в обиход Хассан ибн Саббах, лидер и единственный поставщик секты фидаев («жертвующих собой во имя веры»). Последователи Хассана использовали наркотик как магическое средство, превращающее людей в бесстрашных воинов. Орды, сражавшиеся под воздействием гашиша, получили название «хашашин», позднее заимствованное европейскими языками «ассасин» стало синонимом слова «убийца». Омар Хайям изучал Коран под руководством своего товарища и наставника Хассана.

- Причина войны, которую правоверные мусульмане объявили Омару Хайяму, кроется скорее в утонченном гедонизме, которым сочится его поэзия, нежели в его научных теориях. Призыв получать от жизни удовольствие звучит даже в следующих строчках «Рубайят»:

  Что гнет судьбы? Ведь это всем дано.
  Не плачь о том, что вихрем сметено.
  Ты радостно живи, с открытым сердцем
  Жизнь не губи напрасно, пей вино!
  (Пер. В.В. Державина)

  Наслаждаться вином в Персии того времени означало не что иное, как наказание в 80 ударов плетьми. В наше время в светских арабских странах можно купить бутылки вина с портретом Омара Хайяма на этикетке.

Цепная линия

Кривая, созданная силой тяжести

◀ *«Силуэт» знаменитой Арки в Сент-Луисе — внушительный образец цепной линии.*

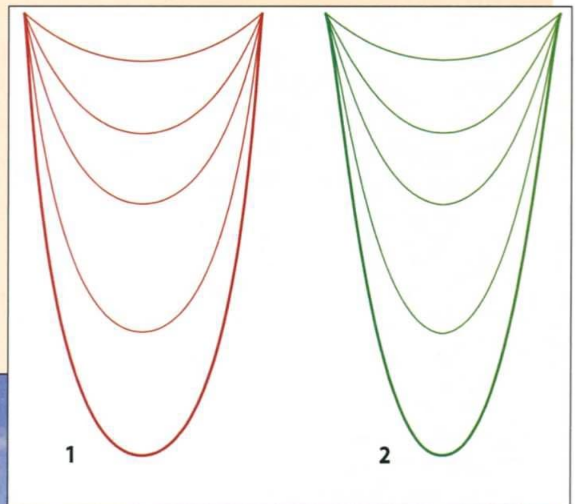
Ежедневно мы имеем дело с кривыми линиями. Их очень любит природа, но и человек, используя свои математические знания, часто обращается к ним в области техники, строительства и пр. Вспомним хотя бы железные дороги, винтовые лестницы, летательные аппараты... Этот ряд можно продолжать долго. Многие кривые, воспроизведенные в творениях рук человеческих, лежат на границе собственно техники и высокого искусства.

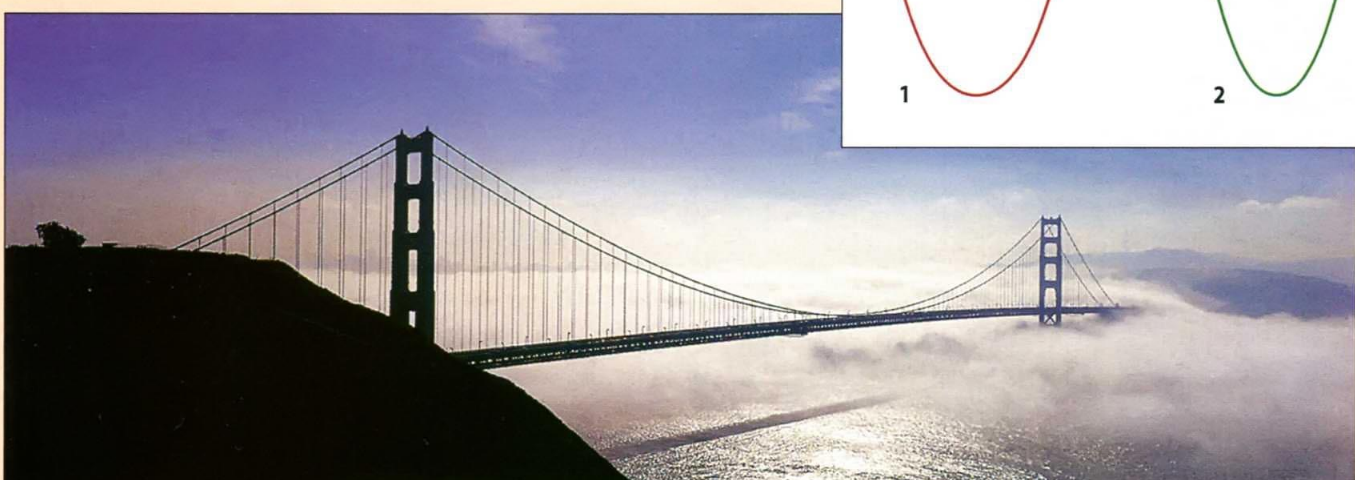
Самая обыкновенная кривая

Линии, образуемые проводами или жемчужными ожерельями, когда они, будучи закрепленными

Цепные линии и параболы

Галилей ошибочно полагал, что кривые, образуемые свисающими цепями, — это параболы. Ошибка эта, впрочем, простительна — параболы и цепные линии действительно очень похожи. Взгляните на чертеж, представленный справа, — кривые 1 на нем являются цепными линиями, а кривые 2 — параболами. Отличие — лишь в степени «заостренности» линий. Визуально, как правило, трудно понять — парабола или цепная линия перед нами; чтобы решить эту задачу, нужно вывести уравнения, описывающие интересующие нас линии. Кстати, конструкции, поддерживающие «висячие» мосты, обычно представляют собой параболы — примером такой параболы могут служить тросы моста «Золотые ворота» в Сан-Франциско (внизу).





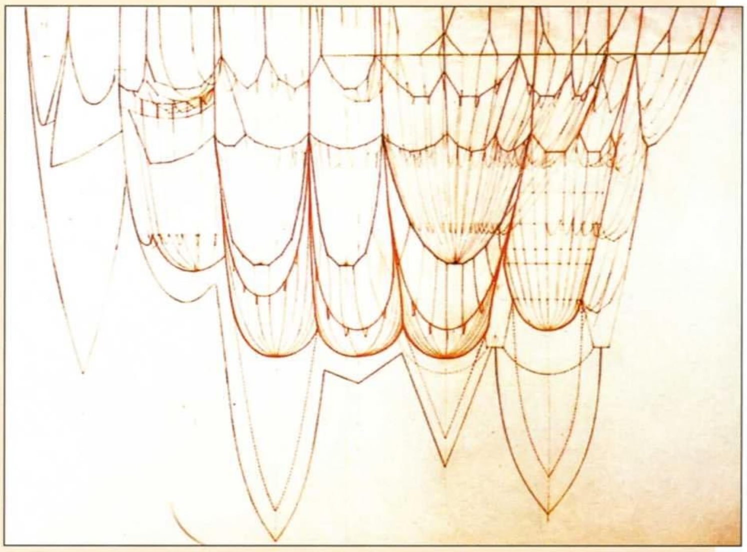
с двух концов, свободно свисают под действием силы тяжести, математики называют «цепными». Долгое время эти кривые не выделялись в отдельную группу, так как было принято считать, что они ничем не отличаются от парабол. Но в начале XVIII века братья Бернулли вывели их уравнение, и оказалось, что это не уравнение параболы. Тогда же появился и термин «цепная линия». Он вполне оправдан и указывает на характер этой кривой, определяющийся видом свисающей под действием собственного веса цепи. Похожим образом располагаются в пространстве гирлянды, которыми в праздничные дни украшают улицы, или провода линий электропередач, переброшенные между мачтами, и пр.

► *Развешанные гирлянды всегда принимают форму цепной линии.*

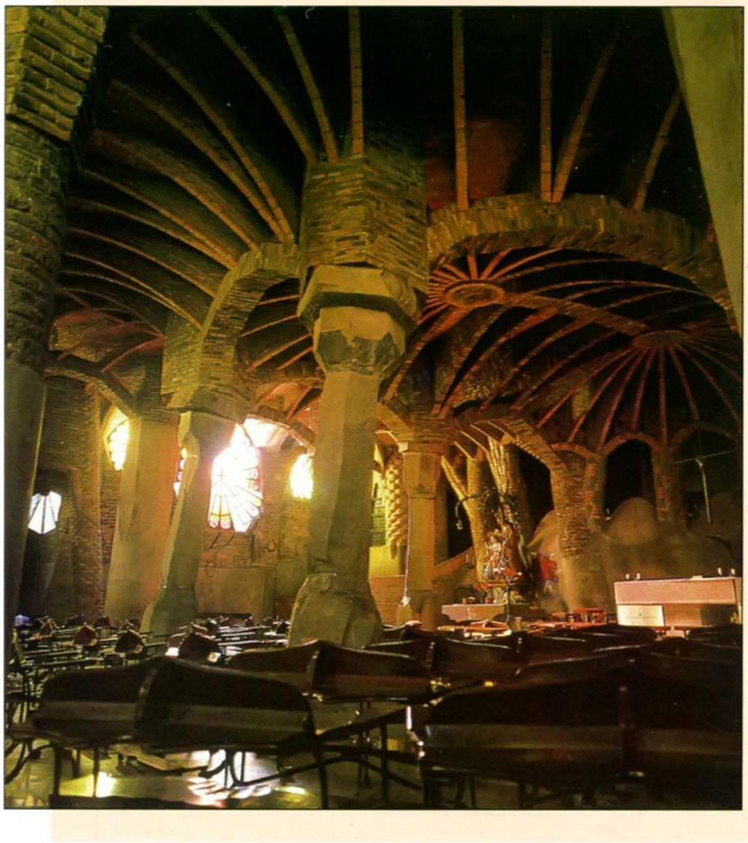
Каталонский гений

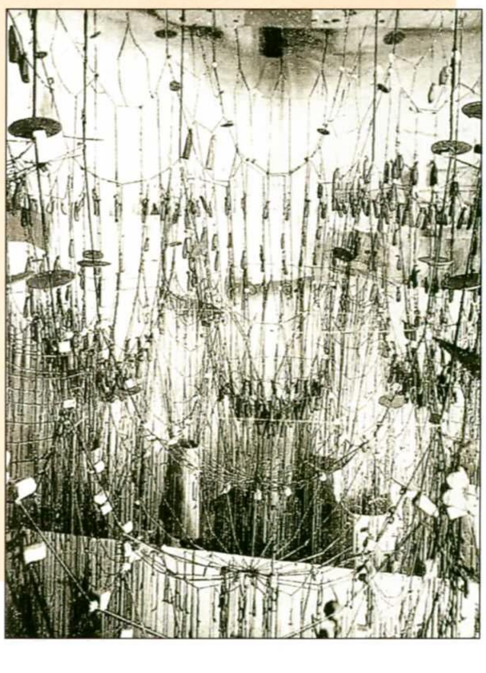
Гениальный испанский архитектор Антонио Гауди (1853—1926) использовал цепную линию для создания опорной арки в нескольких своих творениях. Подобная арка — помимо своей оптимальной механической «функциональности» — несет и эстетическую нагрузку. Говоря проще, она необыкновенно изящна.

Гауди изобрел весьма хитроумный способ выполнения чертежей таких арок без предварительных математических расчетов. Для этого он как бы «переворачивал» мир вверх ногами — на трос, закрепленный в двух крайних точках, архитектор подвешивал мешочки с дробью, игравшие роль предельных нагрузок. Трос после этого располагался по линии многоугольника, которую Гауди «усреднял» в цепную линию. Повернув ее на 180 градусов, он получал абрис реальных архитектурных конструкций.



▲ *Если повернуть на 180° эту страницу, то на ней вы увидите чертежи часовни колонии Гуэль. Таким остроумным способом Гауди получал точную форму цепной линии, не производя специальных математических расчетов.*





► *Чертеж, выполненный при помощи подвешиваемых к тросу мешочков с дробью. Впоследствии он лег в основу одного из проектов архитектора.*

◄ *Идея крипты колонии Гуэль обрела свое завершение в камне.*

Узел III.
Безумная Математильда

«Ждал я поезд».

— Думаю, я действительно немного сумасшедшая, потому меня и называют безумной, — предположила Математильда в ответ на осторожно заданный Кларой вопрос про прозвище. — Я никогда не делаю того, чего в наши дни ожидают от разумных людей. Во-первых, не ношу платьев с длинными шлейфами. Они напоминают мне составы, тянущиеся за паровозом. (Кстати, о поездах. Вон там находится вокзал Чаринг-Кросс. О нем я потом расскажу тебе кое-что интересное.) Во-вторых, не играю в теннис, в-третьих, не умею жарить омлет. В-четвертых, я даже не смогу наложить шину на сломанную ногу. В общем, перед тобой круглая невежда!

Была пора каникул, Клара приехала погостить к тетушке, и Безумная Математильда показывала ей достопримечательности восьмого чуда света — Лондона.

— Вокзал Чаринг-Кросс! — продолжала она, широким жестом указывая на вход и как бы представляя племянницу старому другу. — Бейсуотерскую и Бирмингемскую ветки только что закончили строить, и теперь поезда могут непрерывно циркулировать по замкнутому маршруту, на западе — до границ Уэльса, на севере — до Йорка, и вдоль восточного побережья назад в Лондон. Расписание поездов немного странновато: поезда, следующие на запад, возвращаются на вокзал через два часа после отправления, а поезда, идущие в восточном направлении, находятся в дороге три часа. Каждые 15 минут с вокзала в противоположных направлениях выезжают два поезда.

— Они расстаются, чтобы встретиться затем вновь, — промолвила Клара, и глаза ее наполнились слезами от столь романтической мысли.

— Не стоит плакать, — сухо заметила тетушка. — Они же встречаются не на одной колее железной дороги. Кстати, о встречах. Мне в голову пришла отличная идея! — воскликнула она, со свойственной ей резкостью меняя тему разговора. — Давай сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас увидит больше встречных составов. Сопровождать тебя не нужно: в этих поездах есть специальные дамские купе. Итак, выбирай, в каком направлении тебе ехать, и мы побьемся об заклад относительно того, кто из нас выиграет!

▲ *«Сядем на поезда, идущие в противоположных направлениях, и посмотрим, кто из нас увидит больше встречных составов».*

— Я постараюсь выбрать направление так, чтобы мне встретилось ровно в полтора раза больше поездов, чем вам, — заметила Клара, быстро производя в уме какие-то подсчеты.

— Это невозможно, если, конечно, ты будешь честно считать встречные поезда, — с присущей ей прямотой возразила Безумная Математильда. — Не забудь, что поезд, который отправляется с вокзала Чаринг-Кросс или прибывает сюда одновременно с твоим, в счет не идет.

Леди купили билеты и прошли на центральную платформу. Безумная Математильда, как всегда, болтала без умолку, Клара молча проверяла в уме вычисления, на которые опирались все ее надежды на выигрыш.

— Пассажиров просят занять места на трамплинах! — прокричал дежурный.

— А для чего трамплины? — испуганно прошептала Клара.

— Чтобы было удобнее садиться в поезд, — с невозмутимым видом человека, не видящего в происходящем ничего особенного, ответила Безумная Математильда. — Знаешь ли, немного найдется людей, которые смогли бы без посторонней помощи сесть в вагон за три секунды, а поезд стоит лишь одну секунду.

Тут раздался свисток, и на станцию с противоположных сторон влетели два состава. Короткая пауза, и оба поезда помчались дальше. Но и за это время несколько сотен пассажиров успели впрыгнуть в вагоны (с точностью попав на свои места) и ровно столько же выскочили на платформу.

Три часа спустя родственницы вновь встретились на платформе вокзала Чаринг-Кросс и сравнили свои подсчеты. Клара со вздохом отвернулась. Юному и чувствительному сердцу нелегко переносить разочарование, и Безумная Математильда поспешила утешить племянницу.

— Попробуем еще раз, — ласково предложила она. — Но правила слегка изменим. Начнем как и в первый раз. Но до тех пор, пока наши поезда не повстречаются, считать встречные составы не будем. Как только увидим друг друга из окон вагонов, скажем: «Один!» — и продолжим счет встречных поездов до тех пор, пока не вернемся на вокзал.

Взгляд Клары просиял.

— Я непременно выиграю, — радостно воскликнула она, — только дайте мне самой выбрать свой поезд.

И снова свисток паровоза, снова ожидающие заняли места на трамплинах, снова живая лавина пассажиров чудом успела заполнить два пронесшихся мимо поезда, снова наши путешественницы в пути.

Каждая из них с нетерпением выглядывала из окна своего вагона, держа наготове платок, чтобы успеть подать сигнал, когда поезда поравняются друг с другом. Рев и свист. Наконец поезда встретились в туннеле, и путешественницы с облегчением вздохнули.

— Один! — сказала про себя Клара. — Второй!.. Три, уф! Звучит почти как триумф! Это знак! На этот раз я непременно выиграю!

Но выиграла ли она?

▶ *Льюис Кэрролл часто обращался к этим двум персонажам, Безумной Математильде — эксцентричной викторианской даме — и ее племяннице, живой и непосредственной Кларе. В такой забавной форме писатель излагал свои математические загадки.*

Решения

Задачи

1. Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположные стороны по одному и тому же кольцевому маршруту и отправляющиеся в одно и то же время. Составы отходят от станции каждые 15 минут в обоих направлениях. Один поезд возвращается через три часа, второй — через два. Сколько составов встретит каждый из путешественников на своем пути?

2. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько составов встретится каждому путешественнику?

Ответы

1. 19 поездов.

2. Путешественник, следующий восточным поездом, встретит 12 поездов, второй — восемь. С момента отправления до возвращения в исходный пункт у одних поездов проходит 180 минут, у других — 120. Возьмем наименьшее общее кратное 180 и 120 (оно равно 360) и разделим весь маршрут на 360 частей (будем называть каждую часть просто единицей). Тогда поезда, идущие в одном направлении, будут следовать со скоростью две единицы в минуту, а интервал между ними будет составлять 30 единиц. Поезда, идущие в другом направлении, будут следовать со скоростью три единицы в минуту, а интервал между ними будет равен 45 единицам. В момент отправления восточного поезда расстояние между ним и первым встречным поездом составляет 45 единиц. Восточный поезд проходит 2/5 этого расстояния, встречный — остальные 3/5, после чего они встречаются в 18 единицах от станции отправления. Все последующие составы восточный поезд встречает на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. В момент отправления западного поезда первый встречный поезд находится от него на расстоянии 30 единиц. Западный поезд проходит 3/5 этого расстояния, встречный — остальные 2/5, после чего они встречаются на расстоянии 18 единиц от станции отправления. Каждая последующая встреча западного поезда с восточным происходит на расстоянии 18 единиц от места предыдущей встречи. Следовательно, если вдоль всего замкнутого маршрута мы расставим 19 столбов, разделив его тем самым на 20 частей по 18 единиц в каждой, то поезда будут встречаться у каждого столба. Путешественник, едущий на восток, начинает считать поезда после того, как проедет 2/5 всего пути, то есть доедет до восьмого столба, и таким образом успевает сосчитать 12 столбов (или, что то же самое, поездов). Его конкурент насчитает лишь восемь. Встреча их поездов происходит в конце 2/5 от трех часов, или 3/5 от двух часов, то есть спустя 72 минуты после отправления.

Появившись сравнительно недавно, эта головоломка прочно заняла свое место в мире занимательных математических задач. Речь идет о магических кубиках, трехмерном варианте знаменитой игры пентамино.

Трехмерные пентамино

Магические кубики

Пентаминó — плоские фигуры, состоящие из пяти одинаковых квадратов, соединенных между собой сторонами так называемым «ходом ладьи». Всего существует 12 способов соединения квадратов, не считая вариантов с вращением и симметрией. Эта игра появились более 100 лет назад, и с тех пор ее популярность только растет.

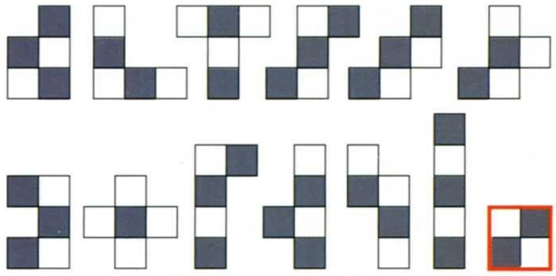
В этом выпуске предложен трехмерный вариант головоломки: в ней можно собирать как объемные, так и плоские фигуры. Предлагаем вам освоить эту игру, решить старые задачки и — почему бы нет — изобрести новые.

◄ *С помощью пентамино можно сложить бесконечное количество фигур, как, например, эта, в форме человеческого лица.*

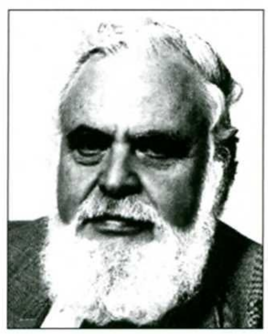
▲ *Художники тоже используют элементы пентамино, как, например, приведенный на иллюстрации «Магический Замок» Гюнтера Альбрехат-Бюлера, одного из самых прославленных экспертов в этой сфере.*

Первоначальная задача: восстановить шахматное поле

Впервые эти фигуры появились в книге англичанина Генри Э. Дьюдени «Кентерберийские головоломки и другие любопытные задачи» 1907 года издания. Дьюдени предложил собрать шахматное поле из 12 фигур пентамино и одного квадратного тетрамино (обведен красным цветом).



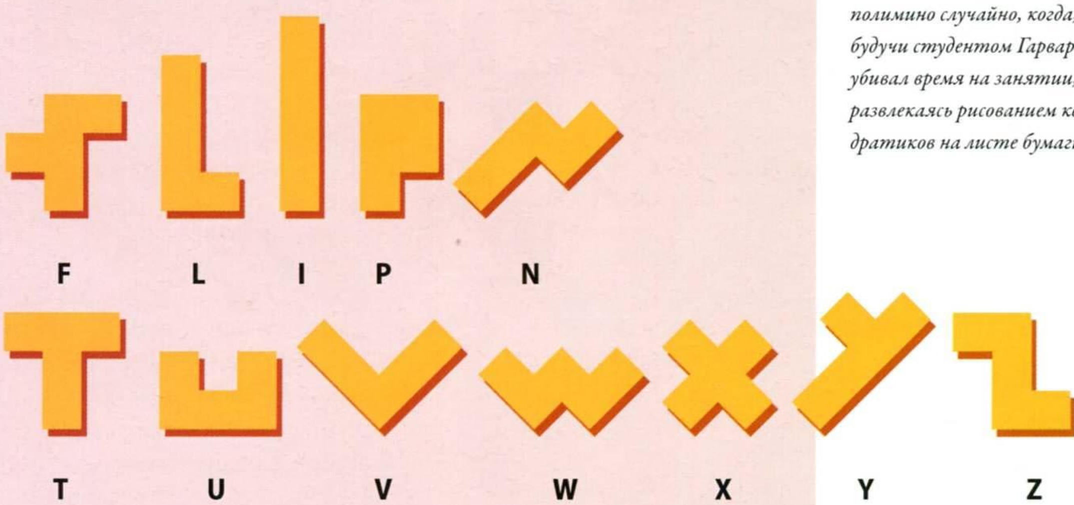
В этой головоломке фигуры не были двусторонними, то есть были окрашены только с одной стороны. Существует множество способов расположения фигур таким образом, чтобы они покрыли шахматную доску, оставив в центре непокрытое отверстие из двух незаполненных квадратов. Чтобы вычислить число возможностей, пришлось прибегнуть к помощи компьютера. Дана Скотт пришел к выводу, что существует 65 решений, не считая вариантов, когда используются детали, созданные с помощью поворотов и симметрии.



► *Соломон Голомб изобрел полимино случайно, когда, будучи студентом Гарварда, убивал время на занятии, развлекаясь рисованием квадратиков на листе бумаги.*

Наименования деталей

Чтобы упростить запоминание каждой из 12 фигур пентамино, математик Соломон Вольф Голомб предложил обозначать их латинскими буквами, которые они напоминают своими очертаниями. Таким образом, чтобы проверить, полный ли у нас комплект игры, можно прибегнуть к следующему приему мнемоники: достаточно запомнить согласные и одну «I» в слове FiLIPiNo («FLIPN») и последние семь букв латинского алфавита («TUVWXYZ»).



Полимино: большое семейство

Термин «полимино» для обозначения фигур, составленных из нескольких квадратов, предложил Соломон В. Голомб в 1953 году. Много позже он опубликовал книгу «Полимино», посвященную изучению этих фигур. Термин происходит от «домино»: фигуры, состоящие из трех квадратов, назывались «тримино», фигуры из четырех квадратов — «тетрамино», а далее, соответственно, пентамино, гексамино и т. д. Значение и происхождение самого термина «домино» еще недостаточно изучено, и единого мнения на этот счет не существует. На рисунке показано, каким образом сам Голомб составил свое имя из 12 пентамино:

Правила образования полимино

С помощью подходящих префиксов можно дать названия всем последующим группам полимино. Элемент полимино, состоящий из *n* количества квадратов, называется «n-мино».

Добавляя каждый раз один квадрат (мономино) к «n-мино», мы получаем «n+1-мино». При помощи этого простого правила и имея в виду, что два соседних квадрата соединяются между собой полными сторонами, можно изучить все варианты присоединения нового квадрата и создавать новые формы элементов полимино.

Однако эта система ставит нас перед фактом, что появляются повторяющиеся фигуры.

Тогда нужно условиться оставлять единственный вариант каждого полимино.

Тождества и геометрические преобразования

Чтобы решить, какие элементы считать повторяющимися, а какие нет, необходимо определить критерии, согласно которым две внешне похожие фигуры полимино будут считаться различными. Эти критерии определяются некоторыми геометрическими преобразованиями и позволяют нам говорить о «свободных», «полусвободных» и «фиксированных» полимино.

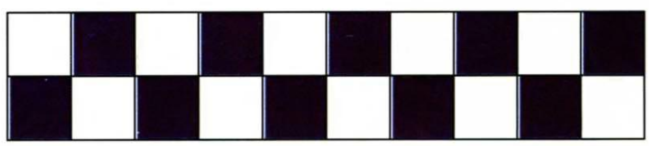
Под свободными полимино подразумеваются элементы, которые не изменяются, вращаясь на плоскости или переворачиваясь. После всех возможных манипуляций фигура является тем же самым полимино, но прокрученным или перевернутым относительно его первоначального положения.

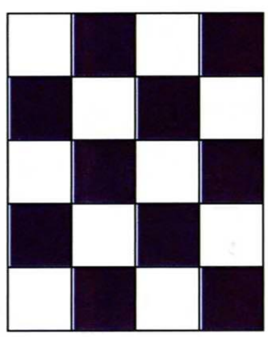
В случае полусвободного полимино не допускается изменение внешнего вида путем поворота на плоскости, но разрешено переворачивание. Другими словами: поворачивая элемент полимино на плоскости, получаем тот же самый элемент, а переворачивая его в воздухе, получаем следующий элемент полусвободного полимино.

И наконец, над фиксированными полимино нельзя производить вышеперечисленные преобразования. Любое перемещение в пространстве рассматривается как появление новой фигуры (см. иллюстрацию на следующей странице).

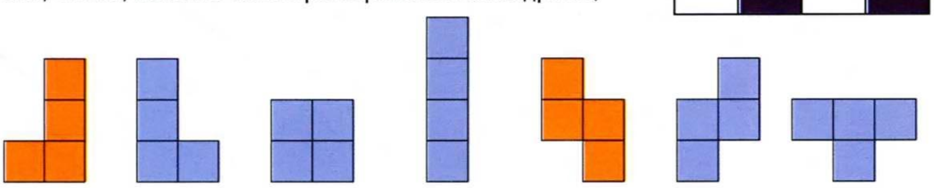
Тетрис и тетрамино

Полусвободные тетрамино стали известны благодаря компьютерной игре «Тетрис». Позже возникли «Пентис» (с пентамино) и «Блок Аут» (с трехмерными тетрамино). Фигуры «Тетриса» могут поворачиваться, но не переворачиваться в воздухе (именно это и является характеристикой игры). Ниже на иллюстрации представлен полный комплект элементов «Тетриса».





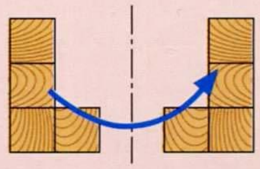
Пять элементов, окрашенных в синий цвет, — это свободные тетрамино. Так как основная задача игры с полимино состоит в том, чтобы узнать, можно ли собрать из них прямоугольники, попробуем выяснить, возможно ли это сделать при помощи пяти свободных тетрамино. Оказывается, что нет, нельзя. В нашем распоряжении 20 квадратов, значит, прямоугольник будет 2×10 или 4×5. Раскрасим фигуры как элементы шахматной доски. Четыре тетрамино составлены из двух белых и двух черных квадратов, а последний, в форме Т, из трех и одного квадрата соответственно.



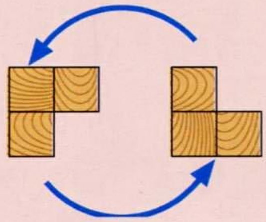
Следовательно, комбинируя элементы, получим фигуру с четным числом белых квадратов и нечетным числом черных. Но оба прямоугольника состоят из четного числа квадратов каждого цвета, а значит, проблема неразрешима.

Отражение и вращение

На рисунке справа вверху мы видим два L-образных тетрамино, причем один является отражением другого. Если считать их фиксированными, то это две различные фигуры. То же самое, если они являются полусвободными, поскольку вращение не позволит нам наложить одну фигуру на другую. Но если мы предположим их свободными, то они идентичны, поскольку, перевернув фигуры, мы можем получить одну из другой.



На рисунке справа изображены два тримино, один прокручен на четверть оборота относительно другого. Если они фиксированные, тогда они различны. Но если мы считаем их свободными или полусвободными, они идентичны.



Игры с пентамино

Рассмотрим несколько головоломок, которые помогут нам познакомиться с элементами.

Игры с использованием нескольких фигур:

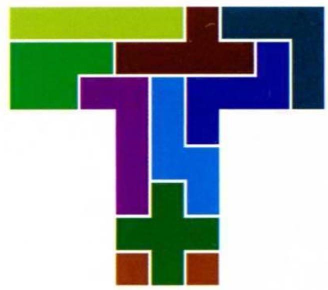
1. Из трех элементов сложить наименьший из возможных прямоугольник 3 × 5.

Существует несколько возможностей, рассмотрим одну из них:

2. Самый маленький квадрат, который мы можем сложить, — 5 × 5. Приведем решение. Можете предложить другое?

3. Из четырех пентамино можно сложить элемент пентамино, удвоенный в размере (учетверенный по площади). Два элемента нельзя воспроизвести таким образом. Можно ли решить задачу, не имея перед собой модели?

4. Выберите пентамино, который будет служить ему моделью: из девяти оставшихся нужно сложить пентамино, утроенный в длину и в ширину. Существует по крайней мере одно решение для каждого из 12 выбранных вами пентамино. Приведем пример:



Используя все элементы

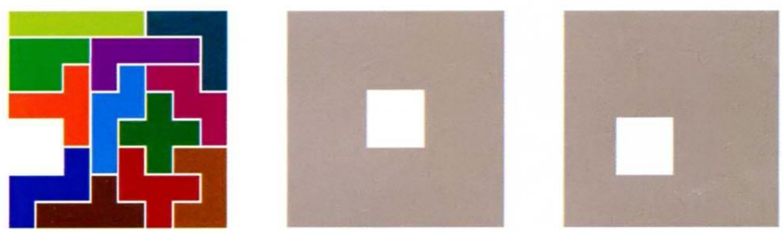
12 элементов пентамино состоят в общей сложности из 12 × 5 = 60 квадратов. Покажем, что из этих 12 элементов можно сложить различные прямоугольники.

1. Сложить два прямоугольника 3 × 5 и 5 × 9 из разных элементов.

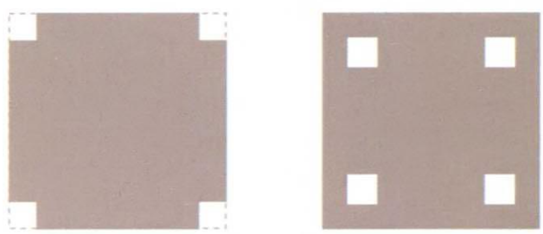
2. Из пентамино формы типа I, N, T, V, W, Y, Z построить прямоугольник 5 × 7. Из пяти оставшихся сложить квадрат 5 × 5.

Игра — дело серьезное

Для начала решим задачу Дьюдени, пользуясь тем, что в наших руках те же элементы (но в данном случае они не раскрашены) . На рис. 3 приведены условия, один пример решен и два нет.

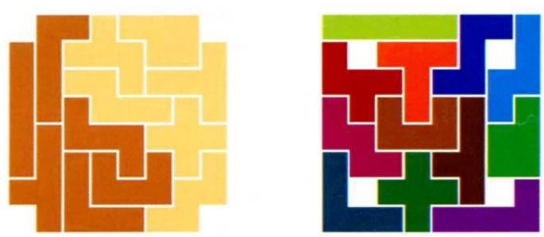


Дано задание расположить 12 пентамино таким образом, чтобы оставить четыре незаполненных квадрата в определенных местах:

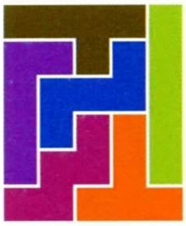


Решения:

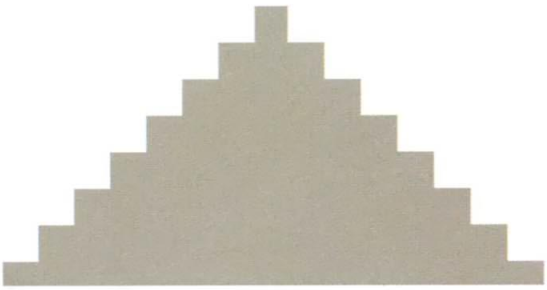
Слева представлена фигура, изображающая символ инь-ян — две накладывающиеся части разного цвета.



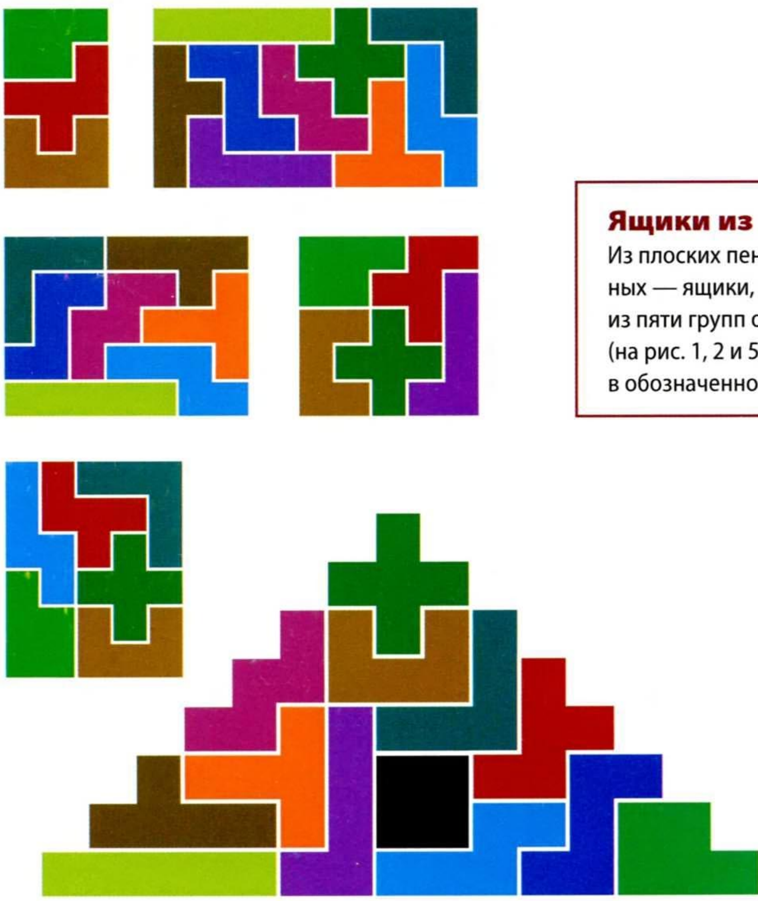
3. Перед вами прямоугольник 5 × 6. Из остальных шести элементов построить другой прямоугольник 5 × 6.



4. На следующем рисунке — пирамида, составленная из 64 квадратов, может быть покрыта 12 пентамино и одним квадратным тетрамино 2 × 2.

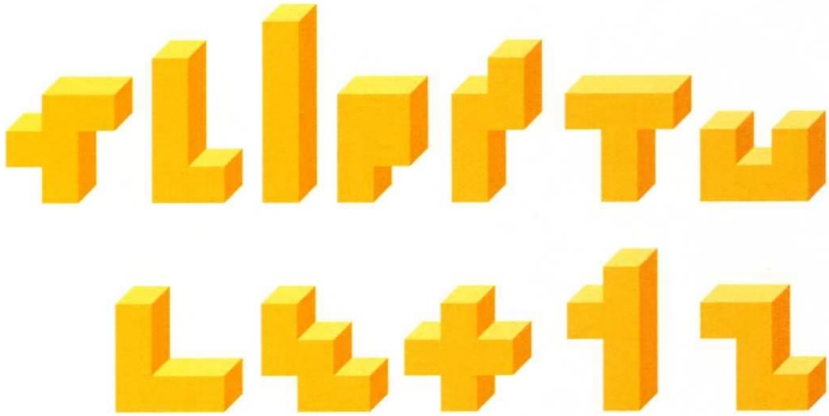


Варианты решений:



Объемные пентамино: магические кубики

Пентамино, состоящие из кубиков вместо квадратов, называются объемными. Соответственно, за исключением одного центрального кубического блока, все остальные фигуры в наборе идентичны плоским пентамино.



Однако новое измерение дает и новые возможности. Теперь ничто не мешает поиграть с наполнением объемов.

Задача 1: сложить ящик 2 × 3 × 10.

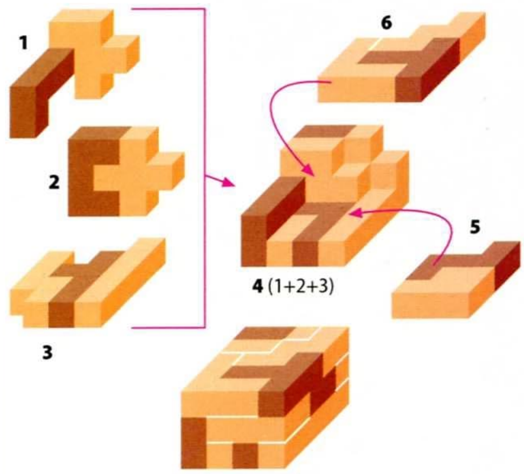
Задача 2: сложить ящик 2 × 5 × 6.

Задача 3: сложить ящик 3 × 4 × 5.

Компьютерный анализ позволяет заключить, что существуют соответственно 12, 264 и 3940 вариантов для каждой задачи.

Ящики из пентамино

Из плоских пентамино можно складывать прямоугольники, а из объемных — ящики, а точнее, параллелепипеды. Ящик 3 × 4 × 5 складывается из пяти групп объемных пентамино, три из них состоят из двух элементов (на рис. 1, 2 и 5) и два состоят из трех элементов, которые собираются в обозначенном порядке.



В следующем выпуске через 2 недели

Пирамида из шаров

Логарифмы

Толкование чисел

От богословия к логарифмам

Джон Непер

Аттракторы и ураганы

От метеорологии к хаосу

Лучшее из Сэма Лойда

Вопрос о пространстве

Спрашивайте в киосках!